

ALGORYTMY AUTOMATYCZNEGO TWORZENIA SIATKI ELEMENTÓW W PRAKTYCE - PUŁAPKI METODY. CZĘŚĆ 1

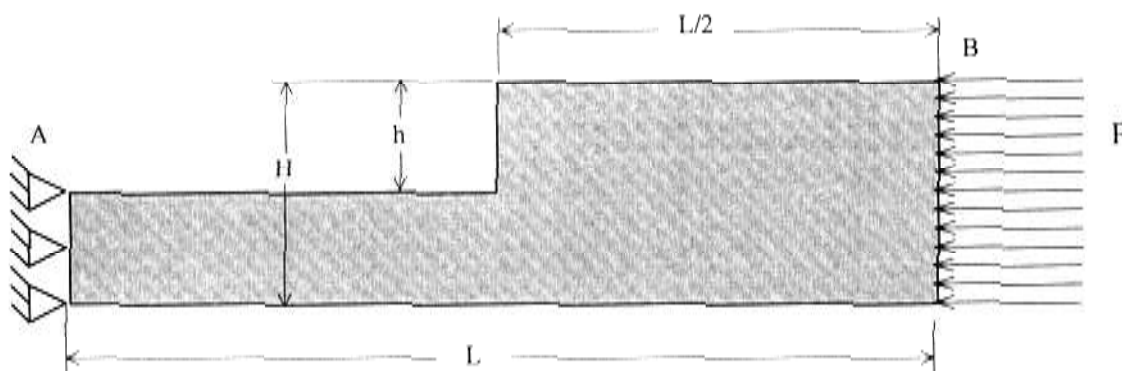
Streszczenie. W pracy przedstawiono wyniki eksperymentów numerycznych przy zastosowaniu adaptacyjnych algorytmów podziału modelu na elementy skończone. Przedstawione rezultaty obliczeń prowadzą do paradoksalnych wyników, sugerując błąd metody. W końcu artykułu paradoks znajduje proste wyjaśnienie, a formalna poprawność metody zostaje potwierdzona.

WSTĘP

Szerokie stosowanie metody elementów skończonych w analizach wytrzymałości konstrukcji powoduje zainteresowanie dokładnością metody, dokładności konkretnego rozwiązania. Istnieją, na szczęście dzisiaj metody oceny tej dokładności dogodne do praktycznego zastosowania. Zwłaszcza metoda oceny rozbieżności naprężeń średnich od aproksymowanych wg przemieszczeń daje bardzo dobre rezultaty praktyczne. Jednak by powstrzymać zbyt entuzjazm wśród inżynierów stosujących te metody w codziennej pracy przestudujmy kilka przykładów obliczeń na przykładzie popularnego karbu, który powszechnie uznaje się za doskonale znany. Jak zobaczymy, bezkrytyczne stosowanie metody zagęszczania siatki daje nie do końca oczekiwany rezultat, prowadząc do nadmiernego zagęszczenia siatki w miejscach gdzie jest to niezupełnie potrzebne, przy jednoczesnym braku zwiększenia dokładności. Zwiększa więc niepotrzebnie koszt numeryczny obliczeń, nie wpływając zasadniczo na poprawę dokładności wyników.

PRZEDSTAWIENIE PROBLEMU

Jako przykład weźmy problem płaskiego stanu odkształceń dany jak na rys.1, który może być pewnym przybliżeniem problemu rozciągania złącza dwu blach o różnej grubości.



Rys.1. Modele złącza czołowego blach o różnej grubości

Warunki brzegowe geometryczne narzucamy na krawędzi A, warunki siłowe na krawędzi B - w postaci obciążenia ciągłego o intensywności $P=1$ [N/mm]. Wymiary modelu przyjmujemy następujące: długość $L=200$ [mm], Wysokość $H=10$ [mm] oraz różnica wysokości $h=5$ [mm]. Zakładamy wykonanie modelu ze stali o własnościach fizycznych :

moduł Young'a $E=2.1 \cdot 10^5$ [MPa],

współczynnik Poisson'a $\nu=0.28$

METODA ROZWIĄZANIA

Dla zobrazowania przedstawionego w tytule problemu wybieramy algorytm automatycznego zagęszczania siatki (ang. adaptive meshing) w celu uzyskania odpowiedniego poziomu estymowanego błędu (ang. H-metod) wartości naprężeń. Algorytm estymacji błędu został opisany przez O.C.Zienkiewicza i J.Z.Zhu w pracy. Koncepcja metody jest prosta. Jak wiadomo z metody elementów skończonych aproksymowane przemieszczenia \hat{u} wewnątrz elementu skończonego opisujemy za pomocą przemieszczeń brzegowych (węzłowych) \bar{u} i funkcji kształtu N :

$$\hat{u} = N\bar{u} \quad (1)$$

Różnica pomiędzy rozwiązaniem aproksymowanym a dokładnym jest poszukiwanym błędem e :

$$e = u - \hat{u} \quad (2)$$

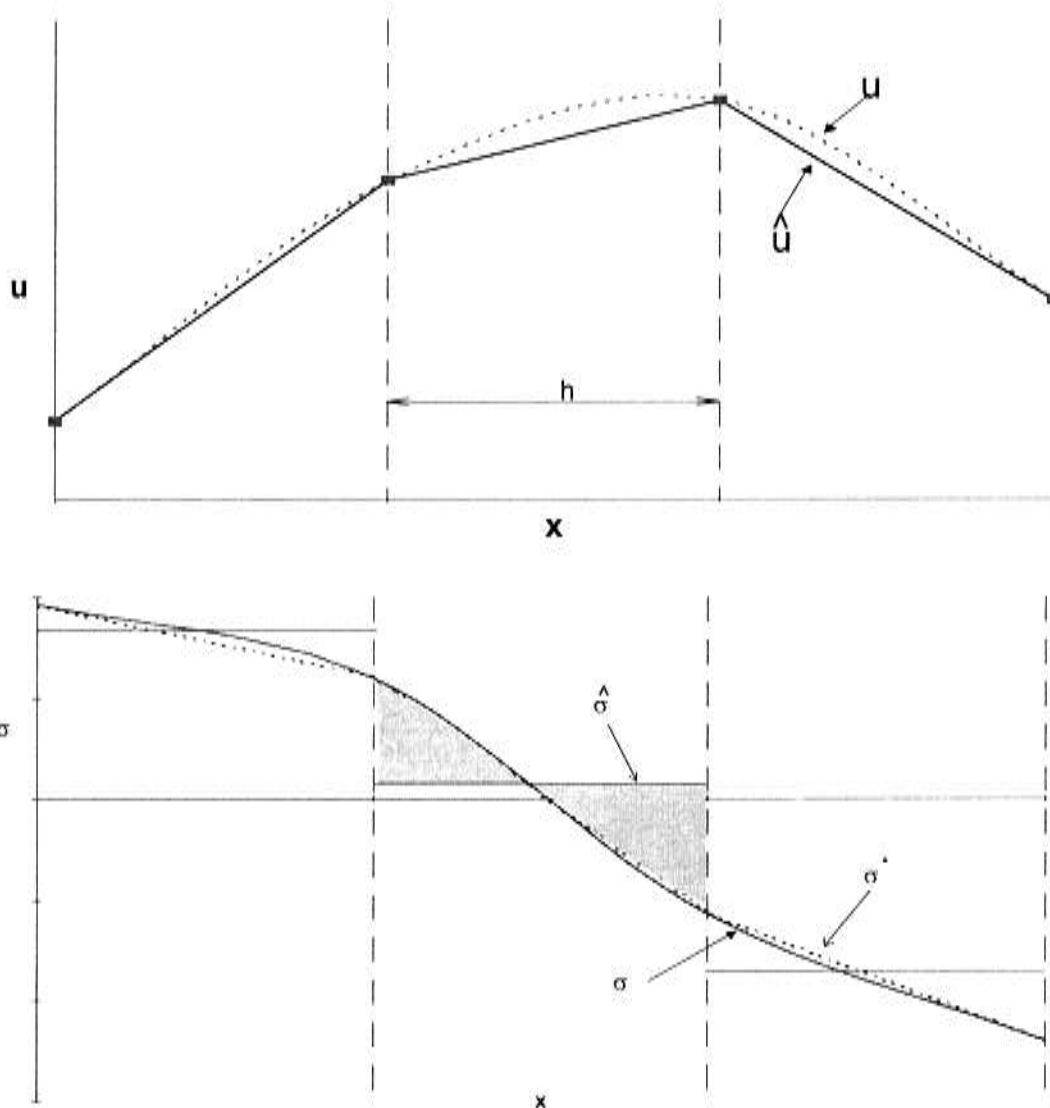
Analogicznie błąd dla naprężeń definiujemy:

$$e_\sigma = \sigma - \hat{\sigma} \quad (3)$$

Musimy jednak pamiętać o zasadniczej różnicy w definicji aproksymowanych naprężeń w stosunku do definicji aproksymowanych odkształceń. Te pierwsze są wartością dyskretną, gdyż reprezentują średnie naprężenia w elemencie. Od tego stwierdzenia niedaleka już droga do pomysłu jak estymować wartość błędu naprężeń. Pomysł opiera się na zastosowaniu aproksymacji naprężeń wewnątrz elementu tą samą funkcją kształtu co przemieszczenia. Tak aproksymowane naprężenia przyjmujemy jako estymację rozwiązania dokładnego, a różnicę pomiędzy wartością estymowaną naprężeń σ^* i wartością średnią w elemencie $\hat{\sigma}$ przyjmujemy za poszukiwany błąd :

$$e_\sigma = \sigma^* - \hat{\sigma} \quad (4)$$

Opisywane zależności obrazuje poniższy rysunek:

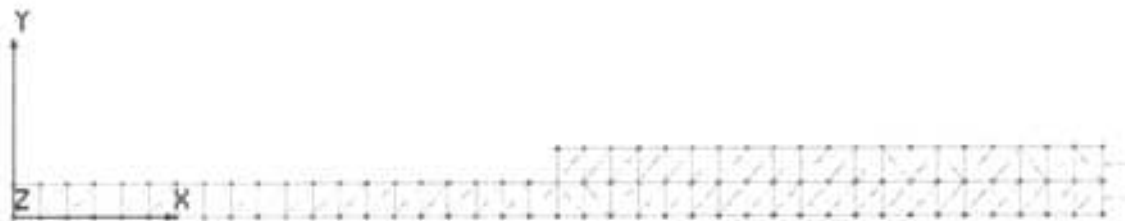


Rys.2. Charakter aproksymacji i błędu w naprężeniach dla jednowymiarowego problemu z liniowymi funkcjami kształtu

Na zakończenie tego krótkiego opisu należy zaznaczyć, że do większych trudności metody należy znalezienie odpowiedniej normy dla poprawnego określenia miary błędu, w tej chwili najczęściej stosuje się normę „energetyczną” bądź typu L_2 . W prezentowanym poniżej przykładzie jako miarę błędu przyjmujemy tę pierwszą.

ROZWIĄZANIE PRZYKŁADU

Przykładową analizę rozpoczniemy od modelu, który jest pokryty jednorodną siatką elementów liniowych typu TRIANG o trzech węzłach i dwu stopniach swobody w węźle. Element ten służy do analizy zagadnień płaskiego stanu naprężeń i odkształceń. Model ten zilustrowany jest na rysunku (rys.3):



Rys.3. Model pierwszy - podział równomierny

Składa się ze 120 płaskich, trójkątnych elementów rozpiętych na 103 węzłach i posiada 202 stopnie swobody. Prześledźmy rozwiązanie w zakresie naprężeń zredukowanych wg Hipotezy H-M-H, które przedstawia kolejny rysunek (rys.4):



Rys.4. Model pierwszy- naprężenia zredukowane (MPa)

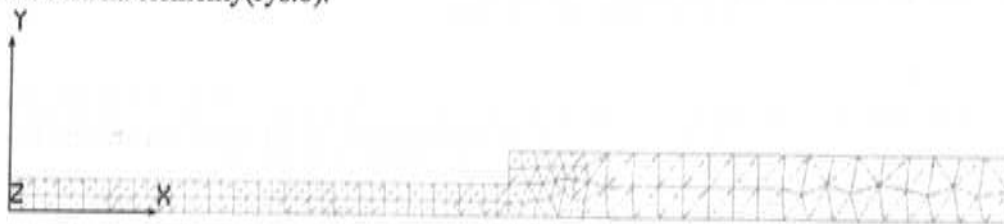
Siatka podziału modelu na pierwszy rzut oka wydaje się być gęsta, jednak pobieżne sprawdzenie przy zastosowaniu najprostszych wzorów pokaże nam, że naprężenia zredukowane, w opisywanym przypadku wynoszące około 3 [MPa], są zdecydowanie zbyt niskie¹. Podejrzanie to potwierdzamy weryfikując problem algorytmem estymującym błąd w elemencie (rys.5). Błąd względny osiąga w okolicach karbu blisko 100%

$$^1 \text{ Szacunkowo } \sigma = \frac{M(H-h)}{2J} + \frac{PH}{(H-h) \cdot 1} = \left\{ \begin{array}{l} J = \frac{1 \cdot (H-h)^3}{12} = 10.4 [\text{mm}^4] \\ M = \frac{PHh}{2} = 25 [\text{Nmm}] \end{array} \right\} = 8 [\text{MPa}].$$



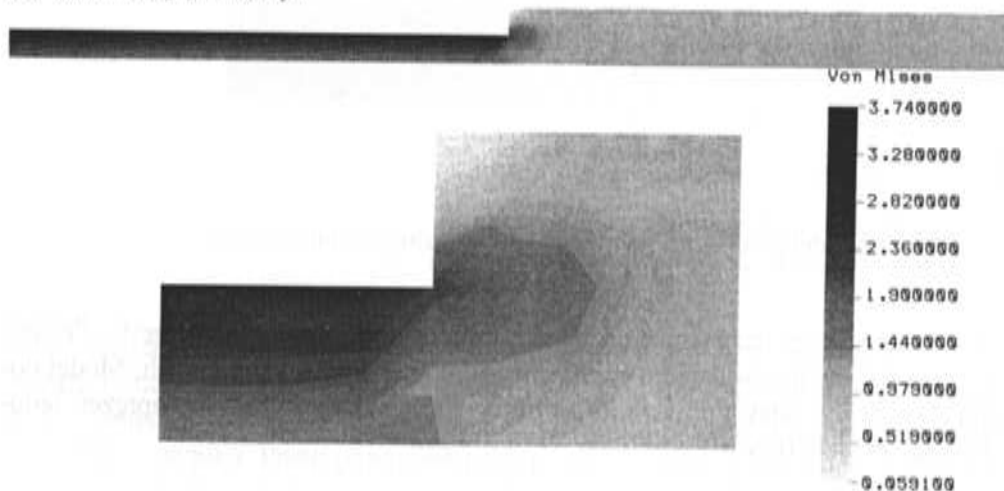
Rys.5. Rozkład wartości estymowanego błędu względnego w modelu pierwszym

Mając określony rozkład błędów możemy rozpocząć algorytm metody wymuszający gęstszy podział na elementach, w których estymowany błąd względny przekracza założony dopuszczalny procent błędów. W wyniku uruchomienia opisywanej procedury otrzymujemy zagęszczony podział modelu na elementy (rys.6).



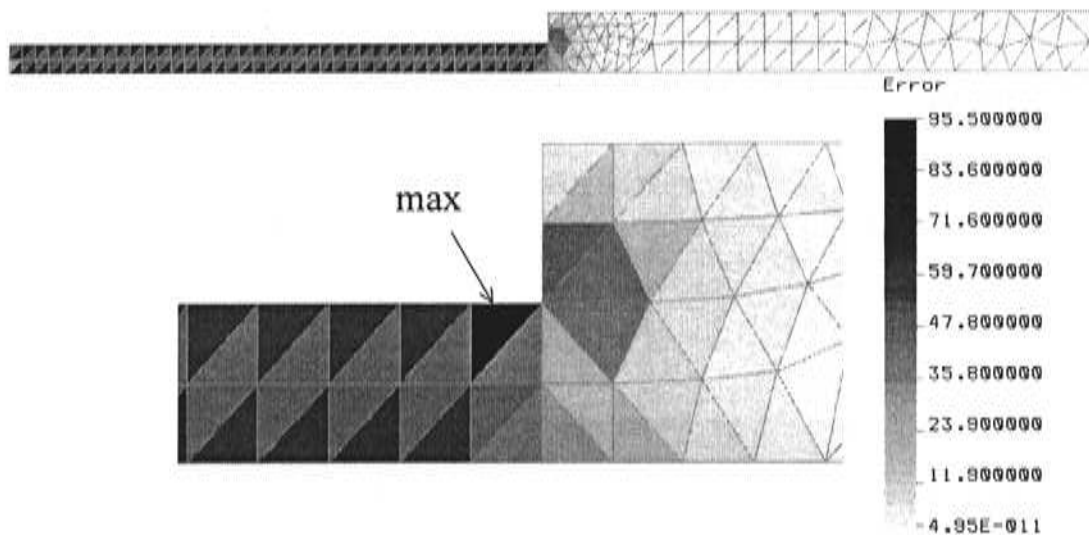
Rys.6. Model po pierwszym przebiegu procesu zagęszczania siatki

Poprawiony model składa się ze 278 płaskich, trójkątnych elementów rozpiętych na 206 węzłach i posiada 406 stopni swobody. W nowym modelu rozkład naprężeń jest lepszy (rys.7), ale czy wystarczająco dobry?



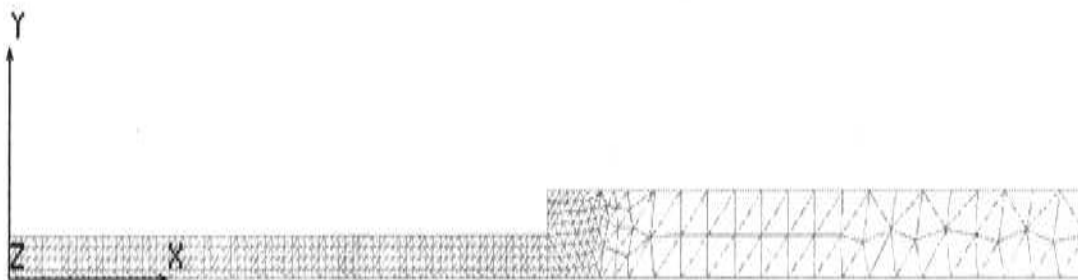
Rys.7. Rozkład naprężeń redukowanych w modelu po pierwszym przebiegu procesu zagęszczania siatki (MPa)

Nadal, mimo dwukrotnego zwiększenia liczby elementów, wartość naprężeń jest niższa od obliczonych szacunkowo. Dla oceny tej rozbieżności wygodnie jest posłużyć się omawianym już algorytmem estymującym błąd w elemencie. Jak widzimy na kolejnym rysunku (rys.8) błąd względny jest nadal wysoki. W rejonie karbu, w dalszym ciągu osiąga 95%.



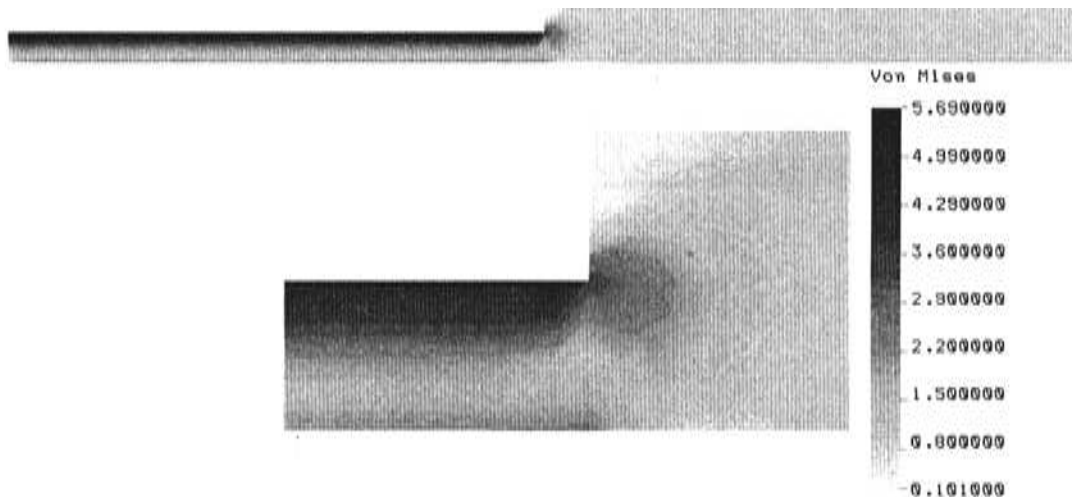
Rys.8. Rozkład estymowanej wartości błędu względnego w modelu po pierwszym przebiegu procesu zagęszczenia siatki

Widzimy, że niezbędna staje się kolejna pętla iteracyjna zagęszczająca podział modelu na elementy skończone. Zwróćmy uwagę na fakt, że odpowiedzialnym za tak duże spiętrzenie naprężeń jest karb, występujący w miejscu przewężenia modelu. Wykonajmy kolejną pętlę iteracyjną. Uzyskujemy podział na elementy skończone, który przedstawia kolejny rysunek (rys.9).



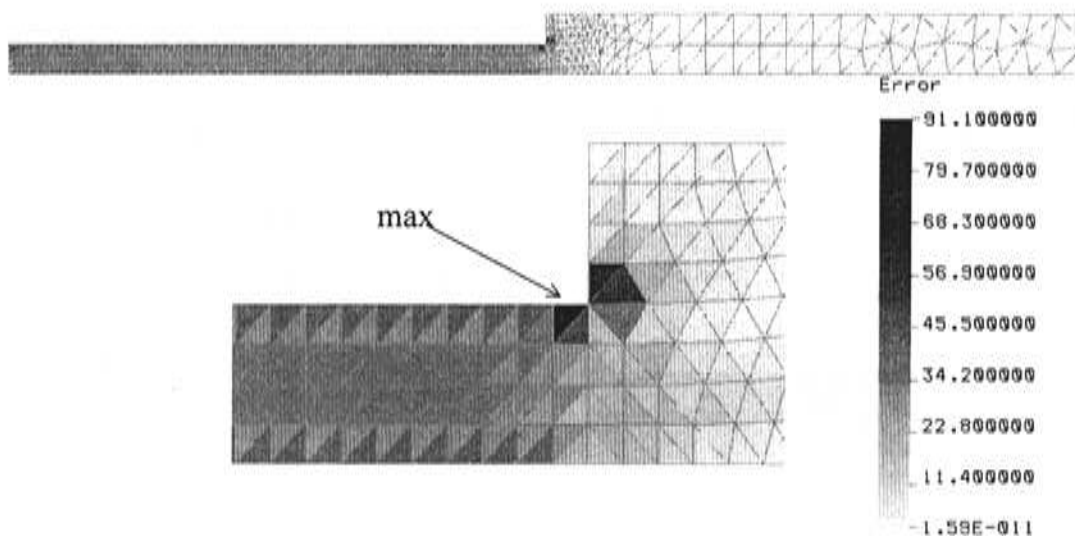
Rys.9. Model po drugim przebiegu procesu zagęszczenia siatki

Tym razem uzyskany przez nas podział na elementy skończone jest doprawdy gęsty. Prezentowana siatka elementów zawiera w sobie 841 elementów rozpiętych na 533 węzłach. Model posiada 1056 stopnie swobody. Niewątpliwie ciekawym będzie poznanie rozkładu naprężeń zredukowanych dla nowego modelu (rys.10).



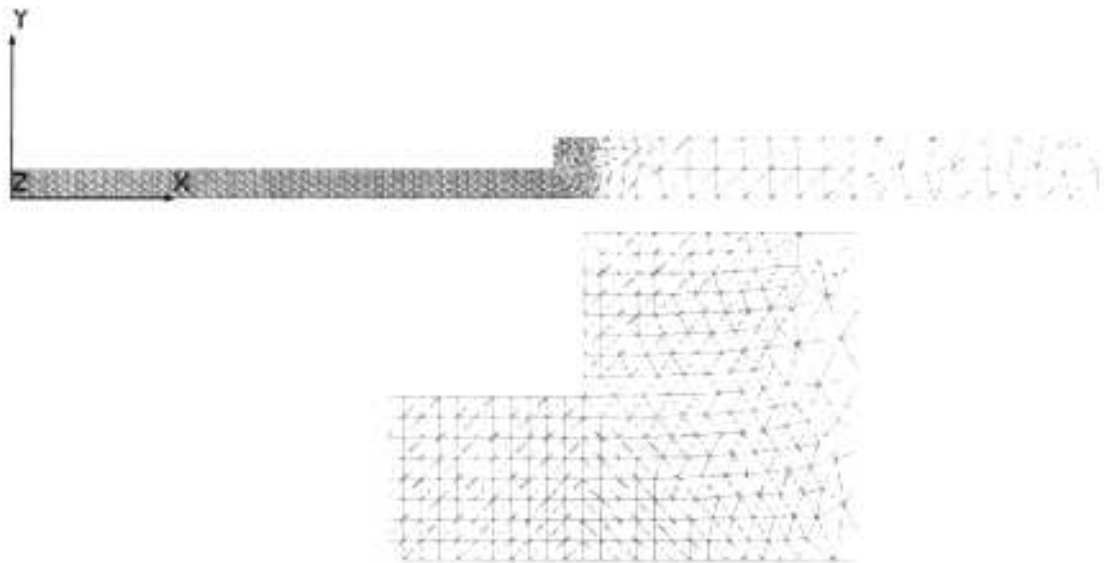
Rys.10. Rozkład naprężeń redukowanych w modelu po drugim przebiegu procesu zagęszczenia siatki (MPa)

I rzecz chyba nie do końca spodziewana dla większości praktyków metody elementów skończonych - naprężenia są nadal za niskie! Spróbujmy jednak spojrzeć na mapkę estymowanego błędu (rys.11).



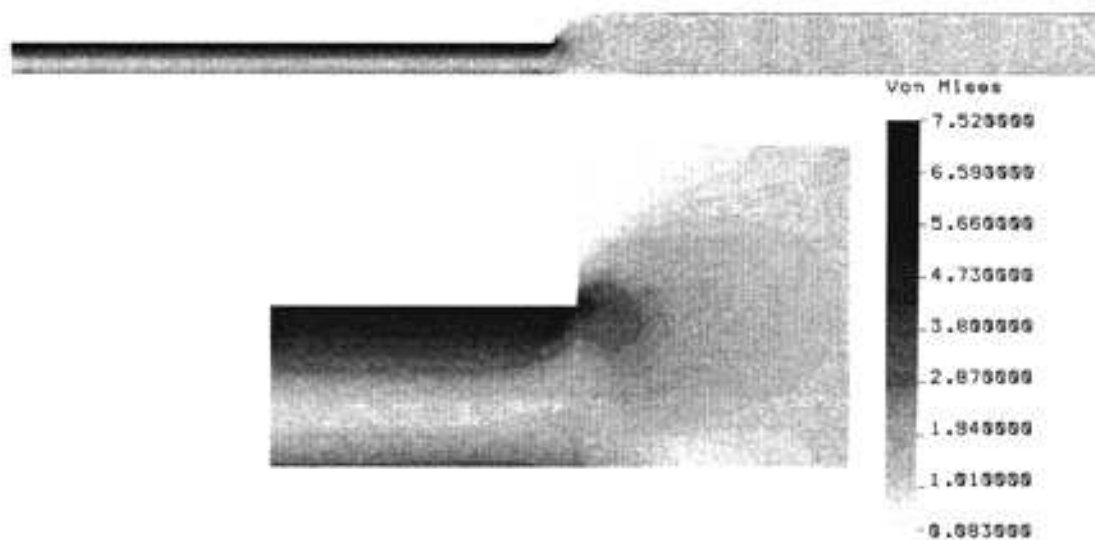
Rys.11. Rozkład estymowanej wartości błędu względnego w modelu po drugim przebiegu procesu zagęszczenia siatki

Choć nastąpił ponad dwukrotny przyrost ilości stopni swobody modelu, w rejonie karbu, nie nastąpiła zdecydowana poprawa dokładności. Chcąc poprawić dokładność należy zagęścić podział. Jednak pojawiają się wątpliwości, dlaczego tak dobrze określona procedura nie prowadzi do poprawy wyniku. Przed odpowiedzią na to pytanie dokonajmy kolejnej pętli iteracyjnej. W jej wyniku uzyskujemy podział na elementy skończone przedstawiony na kolejnym rysunku (rys.12).



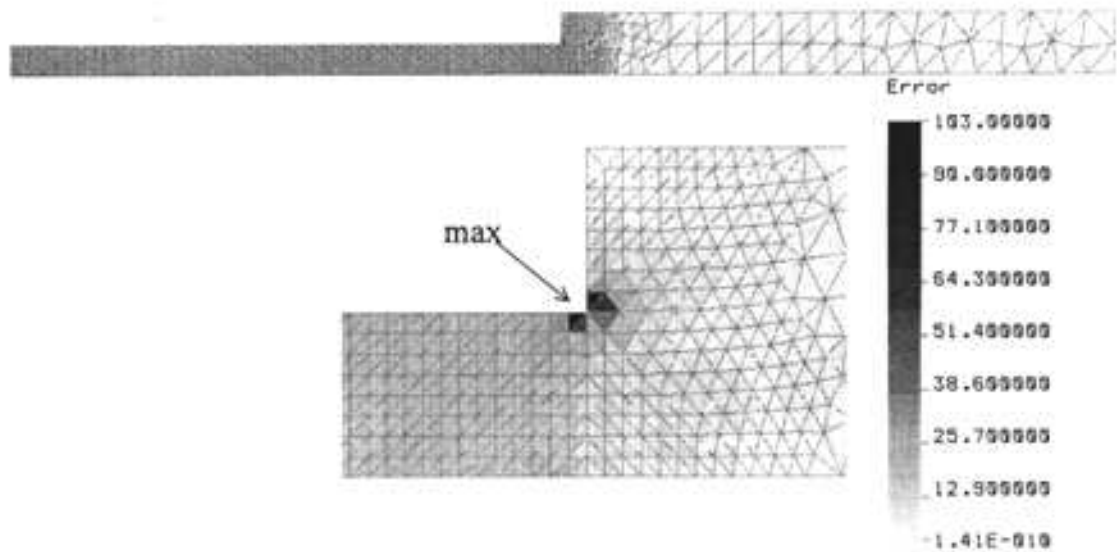
Rys.12 . Model po trzecim przebiegu procesu zagęszczania siatki

Tym razem model urósł nam dość znacznie. Składa się z 3014 elementów rozpiętych na 1708 węzłach i posiada 3398 stopnie swobody. Po tak określonym modelu spodziewamy się wreszcie dostatecznej dokładności... Nie pozostaje nam nic innego jak sprawdzić. Zobaczmy mapę naprężeń redukowanych, którą przedstawia rys.13.



Rys.13. Rozkład naprężeń redukowanych w modelu po trzecim przebiegu procesu zagęszczania siatki (MPa)

Tym razem naprężenia redukowane są zbliżone do obliczonych szacunkowo. Dla formalności sprawdzimy rozkład błędów. Charakterystykę tą zobaczymy na rys.14.

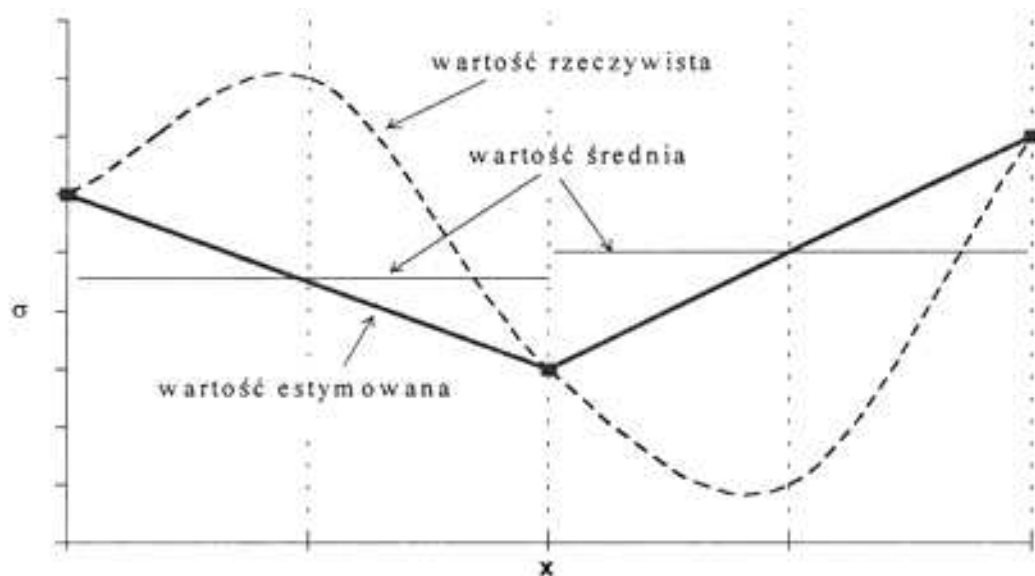


Rys.14. Rozkład estymowanej wartości błędu względnego w modelu po trzecim przebiegu procesu zagęszczenia siatki

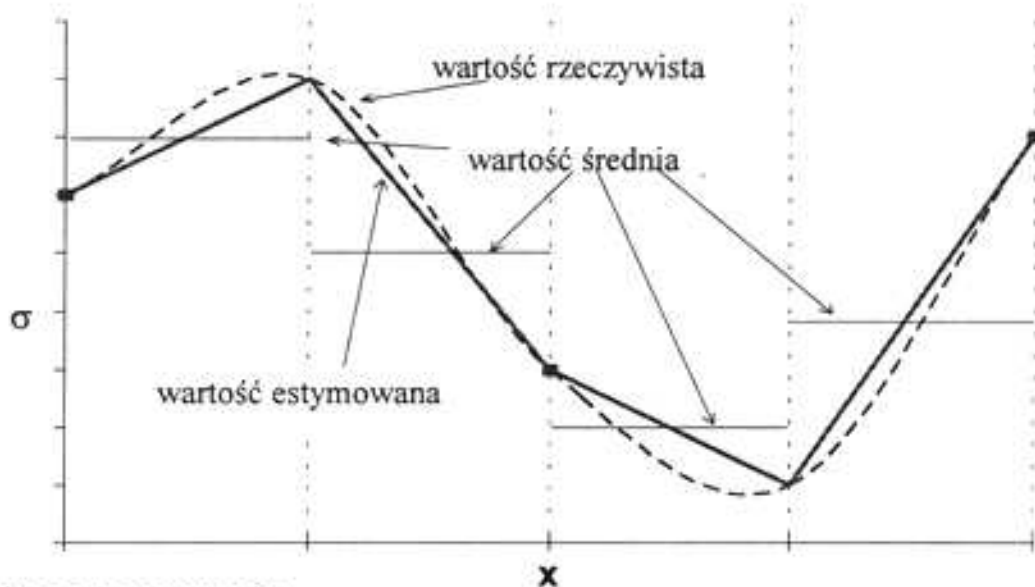
Teraz wyniki są jeszcze bardziej interesujące. Pomimo znacznego zwiększenia gęstości podziału błąd wzrósł! To przecież niemożliwe! Pytanie czy autor nie popełnił jakiejś pomyłki? A jednak możliwe - błąd względny może rosnąć! Tylko co teraz zrobić? Należy zagęścić podział, czyli zastosować starą, sprawdzoną (?) metodę. Lecz czy doprowadzi to na pewno do zakończenia procedury? Czas chyba pomyśleć o innej drodze osiągnięcia wymaganej dokładności. Zainteresowanym rozwiązaniem problemu dokładności innymi drogami proponuje się drugą część niniejszego artykułu. Tutaj zajmijmy się wyjaśnieniem zagadki rosnącego błędu.

WYJAŚNIENIE PARADOKSU

Na szczęście mamy do czynienia z paradoksem pozornym, a wyjaśnienie zagadkowego zjawiska nie nastęrcza problemu. Aby wyjaśnić zagadkę spójrmy na poniższe wykresy (rys.15).



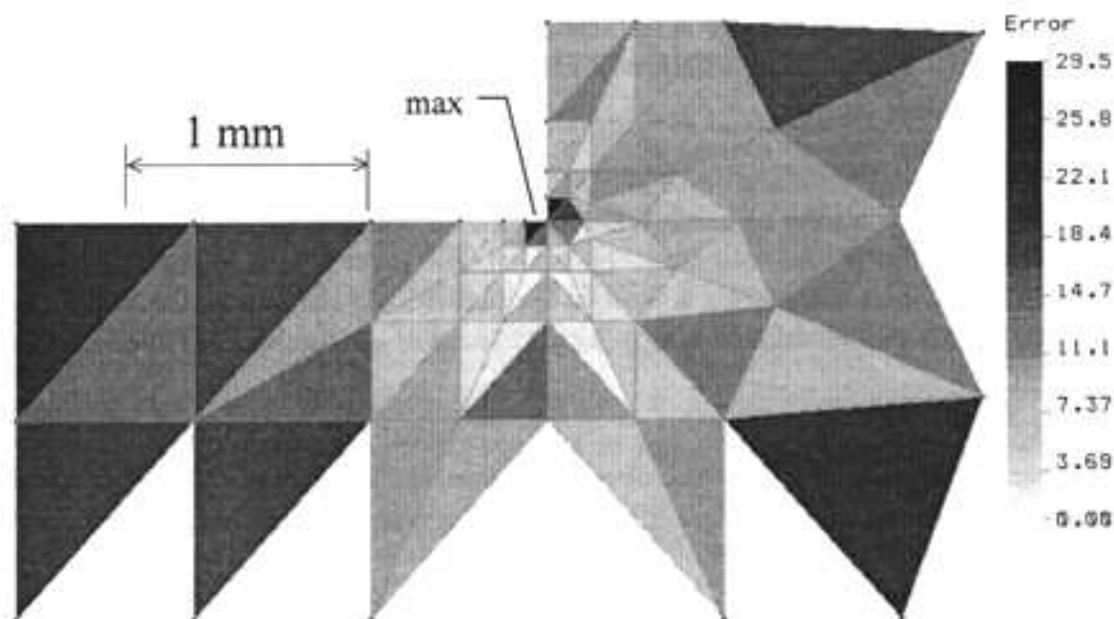
Siatka przed zagęszczeniem



Siatka po zagęszczeniu

Rys.15. Źródło paradoksu przy estymacji błędów funkcjami liniowymi

Jak widzimy odstępstwo wartości estymowanej od wartości średniej jest w przypadku zagęszczonej siatki większe niż w przypadku siatki o większych elementach. Zjawisko to oczywiście znika wraz ze zmniejszaniem się wielkości elementów, jednak jak pokazały to przykłady, może doprowadzić do kłopotliwej sytuacji. Co więcej, w warunkach praktycznych, uniemożliwia stosowanie opisywanej metody, gdyż prowadzi do generowania ogromnych ilości elementów. Gdybyśmy kontynuowali nasz eksperyment w kolejnej pętli otrzymamy model o 11429 elementach rozpiętych na 6086 węzłach i posiadający 12138 stopni swobody. Jednak ten potężny model obciążony jest błędem względnym 125%! I dopiero lokalne (w pobliżu karbu), trójkrotne jeszcze, zagęszczenie siatki sprowadza błąd do 30 %.



Rys.16. Rozkład estymowanej wartości błędu względnego w modelu po siódmym przebiegu procesu zagęszczenia siatki

UWAGI KOŃCOWE

W przedstawionych powyżej przykładach, jak się wydaje na pierwszy rzut oka, zdyskredytowaliśmy metodę adaptacyjnego podziału modelu na elementy skończone. Nic bardziej błędnego. Wykazaliśmy jedynie, że należy unikać elementów liniowych w modelach, w których występują karby czy inne potencjalne źródła dużych spiętrzeń naprężeń. Zresztą stosowanie elementów liniowych (tzn. przemieszczenia są aproksymowane funkcjami liniowymi) jest obciążone ryzykiem, jak pokazały przykłady niemałym, gdyż choć zbieżność ich jest teoretycznie zagwarantowana, to jednak są one wolno zbieżne. Metoda pomiaru błędu względem wartości estymowanej pola naprężeń pozwoliła przecież na wychwycenie ewidentnej słabości elementów liniowych i doprowadziła do najważniejszego celu - poprawy dokładności obliczeń. Niestety, odbyło się to kosztem ogromnego wzrostu kosztu obliczeń. Jednak stosując nowe techniki numeryczne musimy zawsze sobie zdawać sprawę, że ich bezkrytyczne stosowanie może prowadzić nie zawsze tam gdzie, byśmy chcieli.

LITERATURA

1. Rusiński E.: Metoda elementów skończonych. WKŁ, Warszawa 1994.
2. Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.: A Simple Error Estimator And Adaptive Procedure For Practical Engineering Analysis. Numerical Methods in Engineering Vol.24 no.2, 1987, str.337-358.
3. Cosmos/M, Basic FEA System. LinearStatic, Natural Frequency and Buckling Analysis, ver. 1.70 vol.3, Santa Monica 1993, California.
4. Cosmos/M, Advanced Modules User Guide. Advanced Dynamics, Heat Transfer and Nonlinear Static & Dynamic Analysis, ver. 1.70 vol.4, Santa Monica 1993, California.
5. Cosmos/M, Finite Element Analysis System Advanced Seminar. Structural Research & Analysis Corporation, Santa Monica 1993, California.