# MECHANIKA BUDOWLI I

## Wstęp do metody elementów skończonych

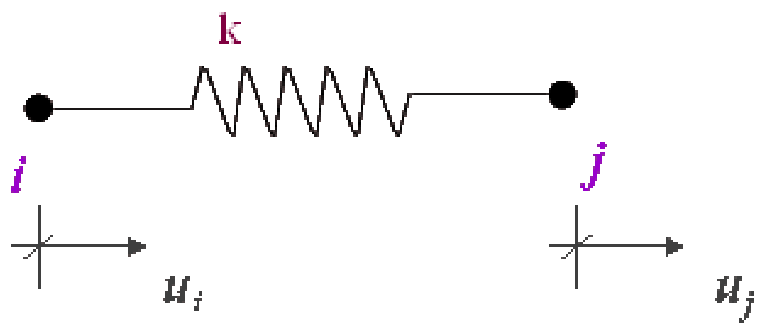
Dr inż. Piotr Wyciślok

# MES –
# zagadnienia jednowymiarowe 1-D

- Sprężyna
- Pręt
- Belka
- i oczywicie złożenia powyższych

- Zajmijmy się sprężyną…

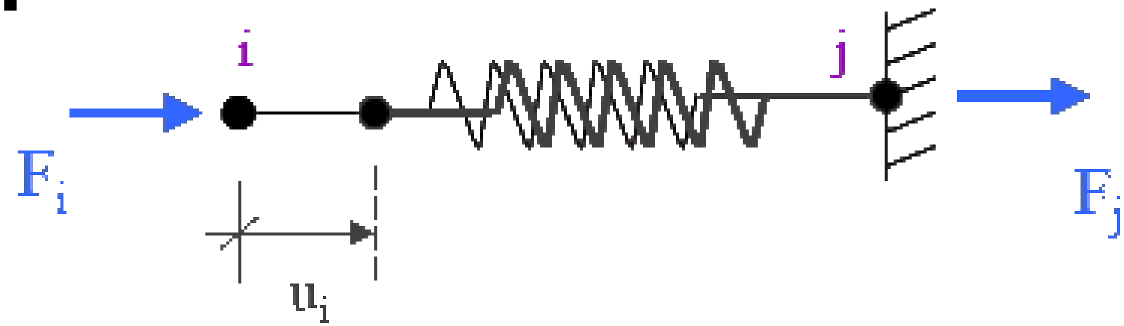
# MES –
# zagadnienia jednowymiarowe 1-D




- Weźmy sprężynę o sprężystości k.
- Oznaczmy jej jeden koniec „i” a drugi „j”
- Przemieszczenie węzła „i” to „$u_i$” a węzła „j” to „$u_j$” .

# Zagadnienia jednowymiarowe 1-D

**Węzeł i**




- Jeżeli „$u_j$”=0 to

$$F_i = ku_i$$

wtedy:

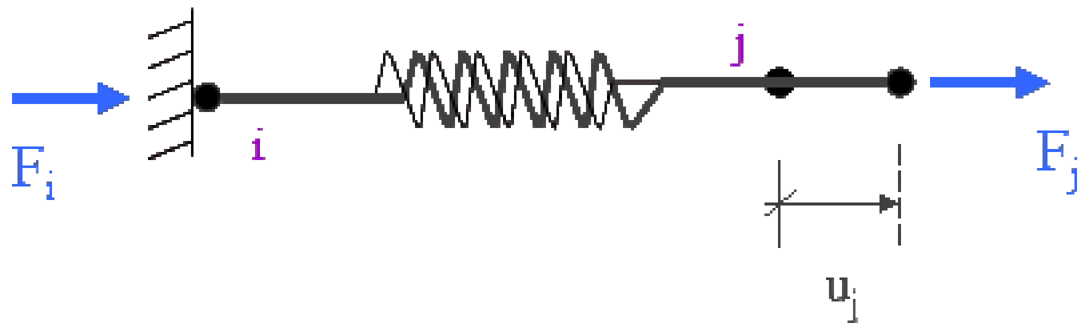
$$F_j = -ku_i$$

bo zachodzi

$$F_i = -F_j$$

# Zagadnienia jednowymiarowe 1-D

**Węzeł j**




- Jeżeli „$u_i$”=0 to

$$F_j = ku_j$$

wtedy:

$$F_i = -ku_j$$

bo zachodzi

$$F_j = -F_i$$

# MES – zagadnienia jednowymiarowe 1-D

- Co zrobiliśmy?
- Stablicowaliśmy wszystkie rozwiązania! (patrz metoda przemieszczeń!!!)
- Zebraliśmy wszystkie rozwiązania ze względu na przemieszczenia węzłów elementu skończonego

# MES – zagadnienia jednowymiarowe 1-D

- Możemy więc uzyskać dowolne rozwiązanie jako kombinację liniową rozwiązań „tablicowych”:

$$F_i = ku_i - ku_j$$

$$F_j = -ku_i + ku_j$$

# MES –
# zagadnienia jednowymiarowe 1-D

- Co możemy zapisać w „wygodnym” zapisie macierzowym:

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}$$

# MES – zagadnienia jednowymiarowe 1-D

- Czym jest to równanie?
  - Równanie równowagi elementu skończonego

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}$$

Macierz sztywności elementu skończonego

Wektor przemieszczeń (niewiadome)

Wektor obciążeń zewnętrznych

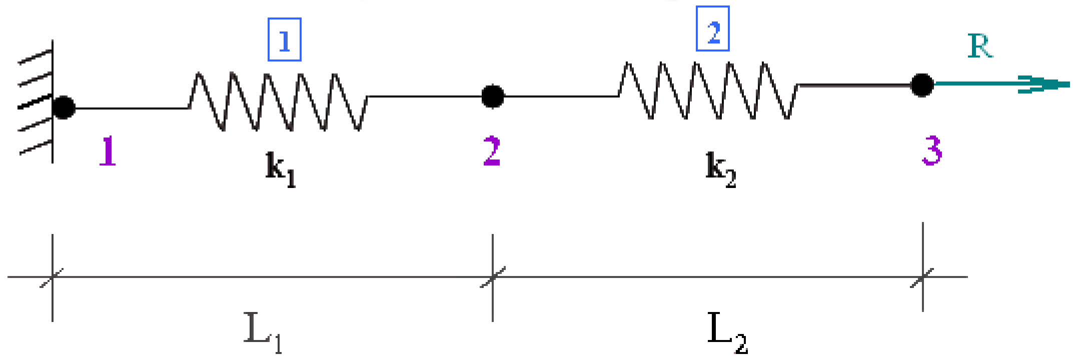
# MES – zagadnienia jednowymiarowe 1-D

- Czym więc jest to równanie?

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}$$

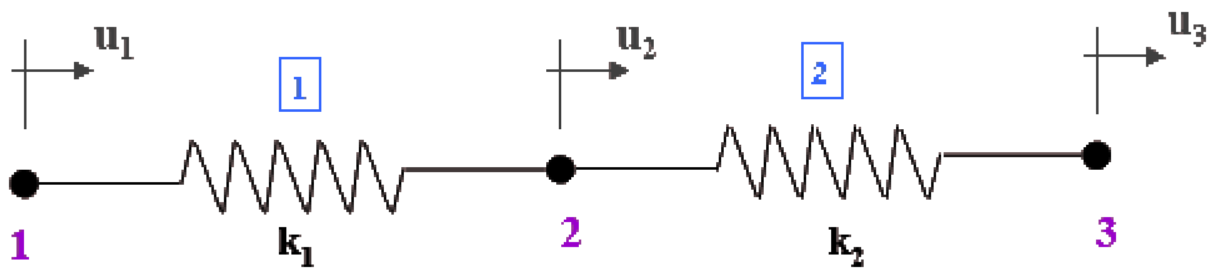
- Odpowiedzią na pytanie: Jak zachowa się element skończony gdy do jego węzłów przyłożymy obciążenie!

# MES – zagadnienia jednowymiarowe 1-D



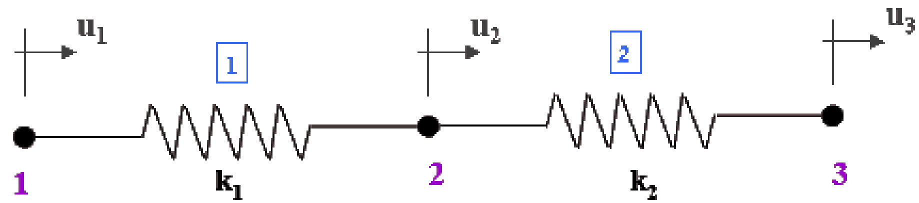

- Weźmy 2 sprężyny o sprężystościach $k_1$ i $k_2$.
- Oznaczmy węzły „konstrukcji” 1,2,3
- Przyłóżmy obciążenie zewnętrzne R w węźle 3.

# MES –
# zagadnienia jednowymiarowe 1-D




- Postąpimy jak poprzednio układając równania równowagi dla każdego węzła
- Skorzystamy z macierzowej metody zapisu
- Oprzemy się na poprzednio stablicowanych wzorach

# MES – zagadnienia jednowymiarowe 1-D



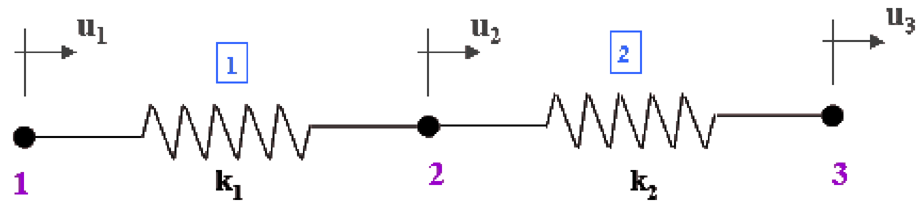

- Macierze sztywności dla naszych dwu elementów skończonych:
- Element 1

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Element 2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

# MES –
# zagadnienia jednowymiarowe 1-D

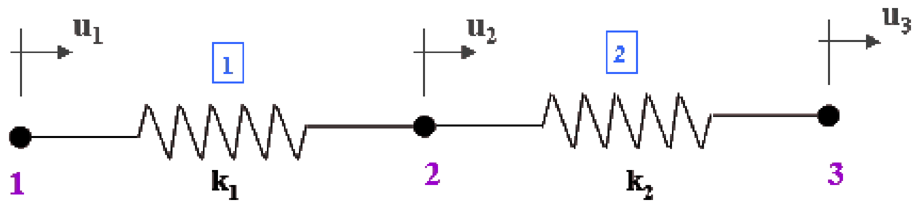



- Równania równowagi całego układu składają się z równań równowagi elementów:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ 0 \\ R \end{Bmatrix}$$

$$P_1 = ? \qquad P_2 = 0 \qquad P_3 = R$$

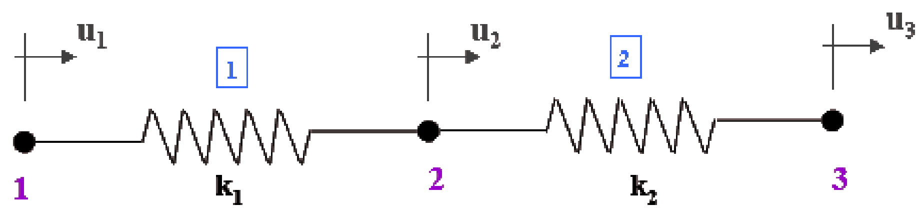
# MES – zagadnienia jednowymiarowe 1-D




- Zauważmy, że macierz jest źle uwarunkowana!!!!
- Mamy trzy równania a 4 niewiadome!
- Z warunków brzegowych wynika : $u_1 = 0$
- Co daje:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ 0 \\ R \end{Bmatrix}$$

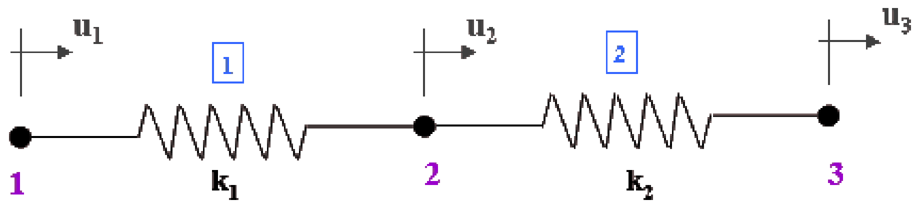
# MES –
# zagadnienia jednowymiarowe 1-D




- Wykreślone równanie posłuży nam do obliczenia reakcji w węźle 1 po rozwiązaniu układu równań:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} u_2 &= \frac{R}{k_1} \\ u_1 &= \frac{R}{k_2} + \frac{R}{k_1} \end{aligned}$$

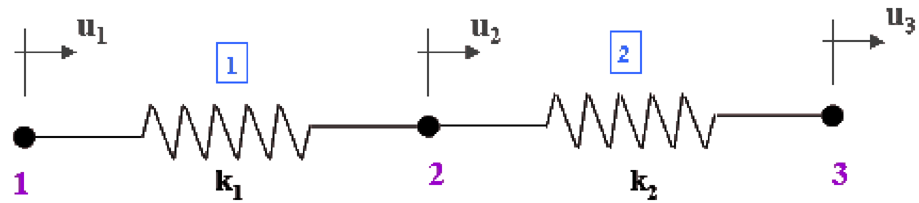
# MES –
# zagadnienia jednowymiarowe 1-D




- Wracamy do wykreślonego równania aby obliczyć reakcje

$$siła\,reakcji = k_1 u_1 - k_1 u_2 = -\frac{R}{k_1} k_1 = -R$$

# MES –
# zagadnienia jednowymiarowe 1-D




- Analogicznie możemy postąpić dla wszystkich sił węzłowych korzystając z faktu, że elementy pozostają w równowadze a my znamy już wartości przemieszczeń!

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \qquad u_2 = \frac{R}{k_1}$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} \qquad u_1 = \frac{R}{k_2} + \frac{R}{k_1}$$

# Dziękuję za uwagę